第39講　虚数と方程式

39　次の各問いに答えよ．ただし，i を虚数単位とする．

(1)　p，q を実数とするとき，$p+qi=0$ は $p=q=0$ と同値であることを示せ．

(2)　実数係数の3次方程式 $x^3+px^2+qx-10=0$ が $1+2i$ を解にもつとき，p，q の値をそれぞれ求めよ．また，他の解をすべて求めよ．

(3)　x の方程式 $x^2-4ix+3-24i=0$ を解け．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 39 講　虚数と方程式

39　複素数 α と β を次で定める．

$$\alpha=\sqrt{5}-1+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i$$
$$\beta=-\sqrt{5}-1+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,i$$

次の問いに答えよ．

(1)　α を解にもち，しかもすべての係数が実数であるような 2 次方程式を 1 つ求めよ．

(2)　α 及び β の両方を解にもち，しかもすべての係数が実数であるような 4 次方程式を 1 つ求めよ．

(3)　β^5 の値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$x^2+2(\sqrt{5}-1)x+16=0$　　㋑　$x^2-2(\sqrt{5}-1)x+16=0$
　　㋒　$x^2-2(\sqrt{5}+1)x+16=0$

(2)　㋐　$x^4+4x^3+16x^2+64x+256=0$　　㋑　$x^4-2x^3+4x^2-8x+16=0$
　　㋒　$x^4-4x^3+16x^2-64x+256=0$

(3)　㋐　-2048　　㋑　1024　　㋒　2048

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第39講　虚数と方程式

39 次の各問いに答えよ．ただし，i を虚数単位とする．

(1) p，q を実数とするとき，$p+qi=0$ は $p=q=0$ と同値であることを示せ．

(2) 実数係数の3次方程式 $x^3+px^2+qx-10=0$ が $1+2i$ を解にもつとき，p，q の値をそれぞれ求めよ．また，他の解をすべて求めよ．

(3) x の方程式 $x^2-4ix+3-24i=0$ を解け．

【答】 (1) 略　(2) $p=-4$，$q=9$，他の解は 2，$1-2i$　(3) $x=-3-2i$，$3+6i$

【解答】

(1) $qi=-p$ より $(qi)^2=(-p)^2$ ゆえに $-q^2=p^2$ となるが，p，q は実数より $p^2\geqq 0$，$q^2\geqq 0$ したがって $-q^2\leqq 0$ であるので，$-q^2=p^2$ が成り立つとき $p^2=0$ かつ $-q^2=0$ ゆえに $p=q=0$ となる．

逆に $p=q=0$ のとき，$p+qi=0$ は明らか．

以上より，p，q が実数のとき，$p+qi=0$ と $p=q=0$ は同値である．

(2) $x^3+px^2+qx-10=0$ が $1+2i$ を解にもつので

$$(1+2i)^3+p(1+2i)^2+q(1+2i)-10=0$$
$$(-11-2i)+p(-3+4i)+q(1+2i)-10=0$$
$$(-3p+q-21)+(4p+2q-2)i=0$$

ここで p と q は実数より $-3p+q-21$ と $4p+2q-2$ は実数になるので

$-3p+q-21=4p+2q-2=0$ よって $p=-4$，$q=9$

このとき，与式は $x^3-4x^2+9x-10=0$ すなわち $(x-2)(x^2-2x+5)=0$ となるので，$x=2$，$1\pm 2i$

以上より，$\boldsymbol{p=-4}$**，**$\boldsymbol{q=9}$　他の解は $\boldsymbol{2}$**，**$\boldsymbol{1-2i}$

(3) $x^2-4ix+3-24i=0$ より $(x-2i)^2=-7+24i$ と変形できるが，

$(3+4i)^2=-7+24i$ より $x-2i=\pm(3+4i)$

ゆえに $\boldsymbol{x=-3-2i}$**，**$\boldsymbol{3+6i}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 39 講　虚数と方程式

39　複素数 α と β を次で定める．

$$\alpha=\sqrt{5}-1+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i$$
$$\beta=-\sqrt{5}-1+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,i$$

次の問いに答えよ．

(1)　α を解にもち，しかもすべての係数が実数であるような 2 次方程式を 1 つ求めよ．

(2)　α 及び β の両方を解にもち，しかもすべての係数が実数であるような 4 次方程式を 1 つ求めよ．

(3)　β^5 の値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$x^2+2(\sqrt{5}-1)x+16=0$　　㋑　$x^2-2(\sqrt{5}-1)x+16=0$

　　㋒　$x^2-2(\sqrt{5}+1)x+16=0$

(2)　㋐　$x^4+4x^3+16x^2+64x+256=0$　　㋑　$x^4-2x^3+4x^2-8x+16=0$

　　㋒　$x^4-4x^3+16x^2-64x+256=0$

(3)　㋐　-2048　　㋑　1024　　㋒　2048

【答】 (1) ㋑　(2) ㋐　(3) ㋑

【解答】

(1)　$\overline{\alpha}=\sqrt{5}-1-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i$ より

$$\begin{cases}\alpha+\overline{\alpha}=2(\sqrt{5}-1)\\ \alpha\overline{\alpha}=(\sqrt{5}-1)^2+(10+2\sqrt{5})=16\end{cases}$$

よって題意を満たす 2 次方程式の 1 つは

$$\boldsymbol{x^2-2(\sqrt{5}-1)x+16=0}$$

(2)　(1)と同様に β を解にもつ実数係数の 2 次方程式の 1 つは

$$x^2+2(\sqrt{5}+1)x+16=0$$

このとき

$$\begin{aligned}&\{x^2-2(\sqrt{5}-1)x+16\}\{x^2+2(\sqrt{5}+1)x+16\}\\&=\{(x^2+2x+16)-2\sqrt{5}\,x\}\{(x^2+2x+16)+2\sqrt{5}\,x\}\\&=(x^2+2x+16)^2-(2\sqrt{5}\,x)^2\\&=x^4+4x^3+16x^2+64x+256\end{aligned}$$

となるので，求める 4 次方程式の 1 つは

$$\boldsymbol{x^4+4x^3+16x^2+64x+256=0}$$

(3)　$x^5=(x^4+4x^3+16x^2+64x+256)(x-4)+1024$ より

$$\beta^5=\boldsymbol{1024}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。